

Otras formas de contar

“El reciente censo invernal de aves acuáticas ha contabilizado en Doñana 164.131 ejemplares.” “El número de ballenas jorobadas en Baja California es aproximadamente 1450.” ¿No se han preguntado nunca cómo se obtienen estos números? ¿Hay alguien que cuenta pacientemente todas las aves o ballenas que pasan delante de sus narices? Y si es así, ¿cómo se las apaña para no contar dos veces el mismo animal?

La primera operación matemática que aprendemos es la de contar y cualquiera sabe hacerlo hoy en día. Sin embargo, lo que no todo el mundo sabe es que hay maneras más inteligentes de contar que la mera enumeración de objetos o individuos.

Para realizar censos de animales, se conoce desde el siglo XIX una técnica bastante ingeniosa: *el método de captura-recaptura*. Supongamos que queremos saber el número de peces de un estanque. Pescamos un cierto número de ellos, digamos 100 (cuanto más alto, mejor). Marcamos estos peces capturados de alguna forma y los soltamos de nuevo en el estanque. Esperamos un tiempo suficientemente largo para que los peces marcados se mezclen con el resto —por ejemplo, una semana—, y volvemos a capturar 100 peces. De ellos, algunos estarán marcados, por ser peces “recapturados”, y otros no. La proporción de peces recapturados nos indicará la población total en el estanque. En efecto, si hay en total N peces y he marcado 100, la probabilidad de pescar en la segunda captura un pez marcado será $100/N$. Por lo tanto, el número medio o “esperado” de peces recapturados es $100 \times 100/N$. Si n es el número

de peces que realmente hemos recapturado, una buena estimación de la población total es:

$$N = \frac{100 \times 100}{n}$$

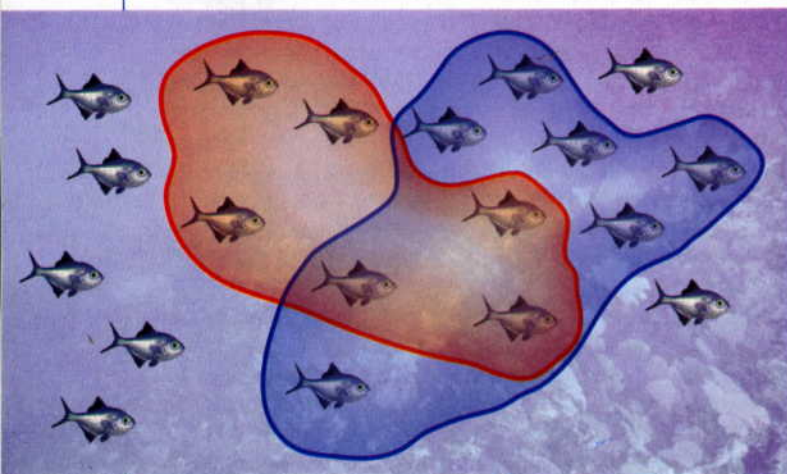
Es decir, si recapturo 20 peces, lo más probable es que la población total sea de unos 500. En general, si en la primera captura pesco n_1 peces y en la segunda n_2 , de los cuales n_{12} resultan estar marcados, entonces la mejor estimación de la población total de peces es:

$$N = \frac{n_1 \times n_2}{n_{12}}$$

En la figura 1 podemos ver una representación esquemática del proceso.

Esta es la versión más simple del método de captura-recaptura. Tal y como lo hemos formulado, son necesarias varias condiciones para que la estimación sea válida. En primer lugar, no sólo el número de peces debe permanecer constante entre las dos capturas (si no fuera así, no tendría sentido calcular dicho número), sino que no puede haber muertes o nacimientos de peces. Si los hubiera, la fracción de peces marcados en la segunda captura sería menor que esa misma fracción en el momento de soltarlos al estanque, es decir, inmediatamente después de la primera captura, puesto que algunos habrán podido morir entre las dos capturas. Ocurriría lo mismo si los peces pudieran abandonar el lugar de estudio, por ejemplo si fuera un río en lugar de un estanque. La segunda suposición es que las capturas tienen que ser completamente aleatorias. Esta aleatoriedad es en ocasiones difícil de conseguir, especialmente en la segunda captura, porque los peces marcados pueden haber “aprendido” a evitar las redes. En general, hay que asegurarse de que los animales marcados no tienen mayor o menor tendencia a ser recapturados que sus congéneres no marcados.

Los métodos más avanzados de captura-recaptura son bastante más complejos de lo que hemos descrito aquí y tienen en cuenta la posibilidad de muertes y nacimientos o de migraciones. Se basan no sólo en dos capturas, sino en un número arbitrario de ellas, después de las cuales los animales vuelven a soltarse. Conformen una “historia” para cada animal capturado. Estas historias suelen denotarse mediante cadenas de ceros y unos: un uno significa que el animal ha sido capturado y un cero significa que no lo ha sido. Por ejemplo, si se han realizado cinco capturas, la historia 01100 indica que el animal ha sido capturado en la segunda y tercera de ellas y se ha “escapado” en el resto, es decir, en la primera, cuarta y quinta. Cada animal tiene una historia. Incluso se puede asociar la historia 00000 a los animales que



En la primera captura (*línea roja*) hemos obtenido 6 peces. En la segunda (*línea azul*) hemos obtenido 9, de los cuales hay 3 marcados. La estimación del número total de peces es $6 \times 9/3 = 18$, ligeramente inferior al valor real, 19.

no han sido cazados en ninguna de las cinco capturas, aunque, a diferencia del resto de historias, no sabemos el número de animales con historia 00000. De hecho, este número es normalmente la incógnita que queremos conocer y se suele estimar a partir del número de animales con historias que contienen al menos un uno, dato que sí conocemos perfectamente de nuestro registro de capturas.

El caso más sencillo es el de dos capturas, sin considerar muertes o migraciones, situación a la que se denomina *sistema cerrado*. Las cuatro posibles historias se muestran en la siguiente tabla:

| HISTORIA | NUMERO DE ANIMALES | PROBABILIDAD | NUMERO ESPERADO DE ANIMALES |
|----------|--------------------|----------------------|-------------------------------|
| 11 | x_{11} | $p \times p$ | $N \times p \times p$ |
| 01 | x_{01} | $(1-p) \times p$ | $N \times (1-p) \times p$ |
| 10 | x_{10} | $p \times (1-p)$ | $N \times p \times (1-p)$ |
| 00 | x_{00} | $(1-p) \times (1-p)$ | $N \times (1-p) \times (1-p)$ |

En la tabla se indican el número de animales con cada historia y la probabilidad de que un animal haya sido capturado de acuerdo con dicha historia. En el modelo más simple, en el que no hay muertes, nacimientos ni movimientos de población, la probabilidad de ser capturado en cada ocasión es $p = n/N$, siendo N el número total de animales y n el número de animales capturados, que aquí hemos supuesto, por simplicidad, el mismo para todas las capturas. La probabilidad de cada historia se obtiene multiplicando la probabilidad de ser capturado o no en cada una de las capturas. Finalmente, la cuarta columna es simplemente N por la probabilidad y nos indica el valor esperado de animales en cada historia. A partir de los valores esperados y de los valores reales, puede estimarse el parámetro p y la población total N utilizando métodos estadísticos, como el llamado de *máxima verosimilitud*. Cuando hay sólo dos capturas, el resultado es el que hemos obtenido en el ejemplo de los peces.

El problema se complica si consideramos tres capturas y aún más si el ecosistema que estamos estudiando es *abierto*, es decir, si admitimos la posibilidad de muertes o migraciones. En este último caso, se suele suponer que el número total de animales se mantiene constante, al menos de forma aproximada, gracias a nacimientos o inmigraciones que compensan las pérdidas. Sin embargo, estas compensaciones, como ya hemos mencionado, hacen que las probabilidades de cada historia cambien. En la tabla de la derecha se pueden ver estas probabilidades. En ellas aparece un nuevo parámetro, v , que es la probabilidad de seguir vivo entre captura y captura.

Aunque estas probabilidades son bastante más complejas que las anteriores, el lector con algunos conocimientos de probabilidad podrá deducir cada una de las entradas de la tabla sin excesiva dificultad. Al igual que en el caso anterior, varios métodos estadísticos permiten encontrar los parámetros p , v o ambos que mejor ajusten los datos de la tabla. Con ello se obtiene una información valiosa acerca del número de animales y de su probabilidad de supervivencia en un período dado. Hay modelos aún más complicados que éste y que

permiten obtener otras características, como el número de animales en celo, su duración, los períodos de anidación, etc. Incluso circulan en Internet varios programas gratuitos, como SURGE o MARK, que realizan estas estimaciones de modo automático, si previamente se elige el modelo a utilizar.

La investigación matemática sobre el método de captura-recaptura continúa. Por ejemplo, en un trabajo reciente, Ricardo García-Pelayo, de la Universidad Politécnica de Madrid, proporciona un método para dar no sólo una buena estimación de la población total, sino también el intervalo de error del resultado. De hecho, gracias a este artículo es como he tenido conocimiento de este tema.

El método de captura-recaptura se ha aplicado también a los seres humanos. Uno de los pioneros de este método fue Laplace, quien lo utilizó para estimar la población de Francia a principios del XIX. Pero, en el caso de los humanos, ¿cómo se realizan las "capturas"? Basta cualquier listado de una muestra de los individuos que se quieren "contar", siempre que la muestra sea suficientemente aleatoria. Por ejemplo, Antonia Domingo Salvany y su grupo, de la Universidad Autónoma de Barcelona, han estimado el número de heroinómanos en Barcelona utilizando estos métodos. Las tres "capturas" consistieron en tres listas: los ingresos en urgencias, las solicitudes de tratamiento de desintoxicación durante el primer semestre, y los ingresos en prisión en el segundo semestre. Según apareciera o no en cada una de estas tres listas, los investigadores asociaron a cada individuo una historia, tal y como hemos hecho en los ejemplos anteriores. Con estos datos, han obtenido finalmente la población total de toxicómanos, estuvieran o no registrados en alguna de las tres listas. En epidemiología la captura-recaptura es también un método muy utilizado para elaborar censos de distintas enfermedades.

| HISTORIA | PROBABILIDAD (ECOSISTEMA CERRADO) | PROBABILIDAD (ECOSISTEMA ABIERTO) |
|----------|-----------------------------------|---|
| 111 | $p \times p \times p$ | $p \times v \times v \times p$ |
| 110 | $p \times p \times (1-p)$ | $p \times v \times v \times [(1-p) + (1-v)]$ |
| 101 | $p \times (1-p) \times p$ | $p \times v \times (1-p) \times v \times p$ |
| 100 | $p \times (1-p) \times (1-p)$ | $p \times [v(1-p) \times v(1-p) + v(1-p)(1-v) + (1-v)]$ |
| 011 | $(1-p) \times p \times p$ | $(1-p) \times v \times v \times p$ |
| 010 | $(1-p) \times p \times (1-p)$ | $(1-p) \times v \times v \times [(1-p) + (1-v)]$ |
| 001 | $(1-p) \times (1-p) \times p$ | $(1-p) \times v \times (1-p) \times v \times p$ |
| 000 | $(1-p) \times (1-p) \times (1-p)$ | $(1-p) \times [v(1-p) \times v(1-p) + v(1-p)(1-v) + (1-v)]$ |

En cualquier caso, el método está también sujeto a ciertas críticas. Las hipótesis en que se basa son en ocasiones demasiado restrictivas y, aun cumpliéndose, el error de la estimación final puede ser excesivo. Por otro lado, hay especies y ecosistemas en los que resultan mejores otras "formas de contar". Por ejemplo, cuando hay pocos individuos y se encuentran dispersos, es mejor realizar el recuento por pura inspección en las distintas zonas en donde habitan los animales. La Sociedad Española de Ornitología organiza cada año este tipo de censos para ciertas especies de aves en peligro de extinción con la colaboración de voluntarios de todo el país.